確率と期待値

「確率」のおさらいをしておこう。

はじめに簡単な例から。

① 花子さんがさいころを振ったところ、次のような結果が得られた。

目	1	2	3	4	5	6
目の出た回数	１１	9	１０	１２	8	１０

Ｑ１．それぞれの目の出る確率を求めよ．　答：略

Ｑ２．目の期待値を求めよ．　答：略

Ｑ３．一般に、事象Ｉ（1≦I≦M）の起こった回数が n_I であるとき、事象Ｉの起こる確率 p_I は、

$$p_I = \frac{n_I}{\sum_{I=1}^{6} n_I}$$

である。

したがって、A_I の期待値は p_I を使って表すと、

$$\langle A \rangle = \sum_{I=1}^{6} A_I p_I$$

と書け、n_I で表すと、

$$\langle A \rangle = \sum_{I=1}^{6} \frac{A_I n_I}{\sum_{I=1}^{6} n_I} = \frac{\sum_{I=1}^{6} A_I n_I}{\sum_{I=1}^{6} n_I}$$

となる。この期待値を「重み付き平均」と呼ぶこともできる。

～～少し簡単過ぎた～～

② 太郎君がラスベガスでルーレットで遊んだところ、次の結果が得られた。

目　(I)	1	2	3	4	5	6	7
目の出た回数　(N_I)	1001	368	135	50	18	7	2

Ｑ１．それぞれの目の出る確率 p_I を求めよ。計算の手順を具体的に示せ。　答：略

Ｑ２．目の期待値 $\langle I \rangle$ を求めよ。目の２乗の期待値 $\langle I^2 \rangle$ はどうか。

答：略

実はこの賭場では、出た目に応じて賞金が出ることになっている。各目に対して出る賞金は次表の通り。

エネルギー準位に相当

目	(I)	1	2	3	4	5	6	7
賞金	(E_I)	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000

↑ 各準位のエネルギーに相当

$\langle E_I \rangle = \sum_{I=1}^{7} p_I E_I$ から求める

Q４．賞金の期待値を求めよ。計算の手順を具体的に示せ。　答：略

実はこのルーレットは、どの目がどれくらいの確率で出るか、ということはそれぞれの目の賞金額を考慮して作られている（勧進元の経営を破綻させないためだ！多額の賞金の出る目は確率が低い）。実は、この勧進元は I の目の出る確率 p_I が

$$e^{-E_I} \qquad (*)$$

← $k_B T = 1$ の場合の ($\beta = 1$) Boltzmann 因子に相当

に比例するようにルーレットを作ったのである。

太郎君の試行結果がおおむね（＊）に従っていることを確かめよ。

このとき、p_I は（＊）を使って、

$$p_I = e^{-E_I} / Q \qquad (**)$$

← $k_B T = 1$ のときの Boltzmann 分布に相当

と表すことができる。

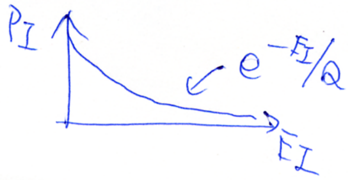
ここで、Q は各目の出る確率の和を１にするために導入された因子で、

$$Q = \sum_{I=1} e^{-E_I}$$

← 分配関数に相当 ($k_B T = 1$)

である。

Q５．賞金と確率の関係をグラフに表せ（横軸に E_I 縦軸に p_I をプロットせよ）。



: Boltzmann 分布の場合と同様

目の期待値は

$$\langle I \rangle = \frac{1}{Q} \sum_{I=1}^{7} I \cdot e^{-E_I} \qquad (***)$$

と書ける。

一方、賞金の期待値は

$$E = \frac{1}{Q} \sum_{I=1} E_I \cdot e^{-E_I} \qquad (****)$$

← 内部エネルギーに相当

と書ける。

アナログとデジタル

はじめに、語句の意味を説明。

アナログ＝連続関数＝解析的な式で表現される

デジタル＝離散的なデータ＝四則演算のみで表現される